تطوير تقنية التكامل الرجعي(الخلفي) خطوة – خطوة لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة

خالد علي محمد خلف [1] ، بشير محمد صالح خلف [2]

[1] قسم الرياضيات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

[2] قسم علوم الحاسبات ، كلية التربية للعلوم الصرفة ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

الملخص

الغرض من هذا البحث هو تطوير تقنية التكامل الرجعي(الخلفي) خطوة – خطوة، وذلك لغرض تسهيل استخدام هذه التقنية لحل المسائل الصلبة. إذ عند استخدام تقنية التكامل الخلفي خطوة – خطوة لحل معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى نحتاج الى حل (n) من المعادلات الجبرية بينما عند استخدام التقنية المطوّرة نحتاج الى حل معادلة جبرية واحدة. وبصورة عامة إذا كانت رتبة المعادلة التفاضلية (m) نحتاج الى حل (mn) من المعادلات الجبرية عند استخدام تقنية التكامل الخلفي خطوة – خطوة. بينما عند استخدام التقنية المطورة نحتاج الى حل (m) من المعادلات الجبرية فقط.

1–المقدمة

تظهر المعادلات التفاضلية في كثير من النماذج الرياضية التي تنشأ في كثير من فروع العلوم، الهندسية، الاتصالات وغيرها. إن القليل من هذه المعادلات يكون لها حلول والتي يمكن التعبير عنها بشكل اعتيادي، لذلك فإنه من الواجب البحث عن حلول عددية لهذه المعادلات والتي تدعى بالطرائق العددية. وهذا يمكن عادةً أن يتحقق الى درجة عالية من الدقة مع وجود أخطاء وفروقات بين الحل التحليلي والحل العددي التقريبي[10,3].

في بـداية الخمسينيات ونتيجة للبحوث التي قدمها العالمان Curtiss & Hirschfelder (1952) كان من الواضح أن هناك نوع مهم من المعــادلات التفــاضلية (ODEs) والتي عرفت فيما بعد بالمعادلات التفاضلية الصلبة والتي قدمت تحدياً قوياً للطرائق العددية المعروفة في ذلك الوقت. ومنذ ذلك الحين ذهب الكثير من الباحثين الى تحليل المسائل الصلبة ونتائجها. ونتيجة لذلك تم اقتراح العديد من الطرائق العددية لحلها[5,9].

2 المعادلة التفاضلية الصلبة Stiff Differential Equation

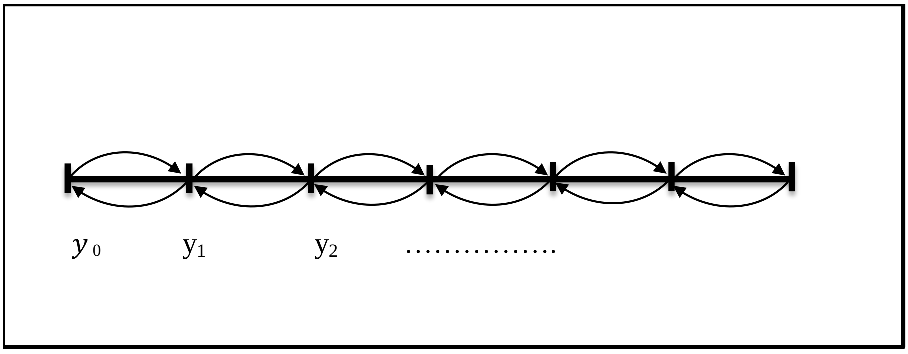
هي المعادلة التفاضلية التي لها حل بالصيغة الاسية $e^{\lambda_i x}$ إذ λ_i تمتلك قيماً مختلفة، واصغر قيمة لـ λ_i عبارة عن عدد سالب كبير وهذ الحل يقترب من الصفر مع زيادة قيمة (x) [8,7].

وبتعبير آخر، هي المعادلة التي لها حلاً مضبوطاً من الصيغة (e^{-cx}) حيث أن(c) ثابت موجب ذو قيمة كبيرة، وهو عادةً جزء من الحل ويدعى بـ (الحل العابر)(Transient Solution).

ويدعى الجزء الأهم من الحل بـ (الحالة – الحل المستقر)(steady-state solution)، الحل العابر للمعادلة الصلبة يقترب من الصفر كلما تزايدت قيمة (x) [4].

3– تقنية التكامل الرجعي(الخلفي) خطوة – خطوة لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة

درس (إلياس. [1]) تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) خطوة – خطوة لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة وقد قدم الباحث اسلوبين لإستخدام هذه التقنية كان الاسلوب الأول بالشكل التالي[1]:



إذ يتم في كل خطوة :

1– تكامل امامي باستخدام طريقة اويلر الاعتيادية.

2– تكامل خلفي (رجعي) باستخدام اويلر الخلفية.

إذ تم في هذه التقنية البدء بتكامل امامي بطريقة اويلر الاعتيادية باستخدام النقطة (y_0) للحصول على قيمة (y_1) ثم بإجراء تكامل خلفي بطريقة اويلر الضمنية باستخدام النقطة (y_0) والنقطة (y_1) للحصول على قيمة جديدة للنقطة (y_1). مثال على هذه التقنية نحل المسألة الاتية:

$$y' = y \qquad y(0) = 1 \qquad (1)$$

الحل المضبوط لهذه المسألة هو)

$$y' = e^x$$

حسب طريقة اويلر الاعتيادية وبخطوة مقدارها $(h = 0.01)$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$
$$y_1 = y_0 + hy_0y_1 = 1 + (0.01)(1) = 1.01$$

نفرض

$$\overline{y_1} = S$$

إذ أن $\overline{y_1}$ تمثل القيمة الجديدة لـ (y_1) وحسب طريقة اويلر الضمنية

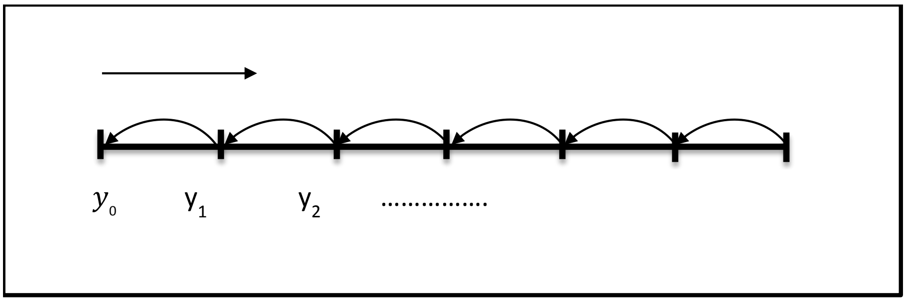
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$
$$\overline{y_1} = y_0 + hf(x_1, y_1)$$
$$S = y_0 + hf(x_1, y_1)$$
$$S = 1 + (0.01)(1.01) = 1.0101$$

ثم نستخدم قيمة (S) كقيمة إبتدائية للخطوة التالية، أي اننا نحل معادلة جبرية في كل خطوة من خطوات التكامل.

جدول (1) الحل العددي للمسألة (1) باستخدام تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) خطوة – خطوة ومقارنتها بالحل المضبوط للمسألة

القيم	الحل العددي	الحل المضبوط	الخطأ
X	Y	T	E
0.01	1.010100	1.010050	4.98 E-6
0.1	1.105716	1.105170	5.45 E-5
0.2	1.222608	1.221402	1.20 E-4
0.3	1.351858	1.349858	1.99 E-4
0.4	1.494771	1.491824	2.94 E-4
0.5	1.652793	1.648721	4.07 E-4
0.6	1.827520	1.822118	5.40 E-4
0.7	2.020719	2.013752	6.96 E-4
0.8	2.234342	2.225540	8.80 E-4
0.9	2.470548	2.459603	1.09 E-3
1.0	2.731725	2.718281	1.34 E-3

أما الاسلوب الثاني الذي استخدمه الباحث فكان بالشكل التالي:



إذ يتم في هذه التقنية إجراء تكامل خلفي باستخدام النقطة (y_0) لإيجاد (y_1) واستخدام النقطة (y_1) لإيجاد النقطة (y_2) وهكذا.

مثال على هذه التقنية نحل نفس المسألة السابقة (2.5)

نفرض

$$y_1 = S$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_n = y_{n+1} - hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

$$y_0 = y_1 - hf(x_1, y_1)$$
$$y_0 = S - hS$$
$$y_0 = (1 - h)S$$
$$S = \frac{y_0}{(1-h)} = \frac{1}{0.99} = 1.01010101$$

ثم نستخدم قيمة (S) كقيمة إبتدائية للخطوة التالية، أي اننا في هذه التقنية نحل معادلة جبرية في كل خطوة من خطوات التكامل.

جدول (2) الحل العدد للمسألة (1) باستخدام تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) خطوة – خطوة ومقارنتها بالحل المضبوط للمسألة

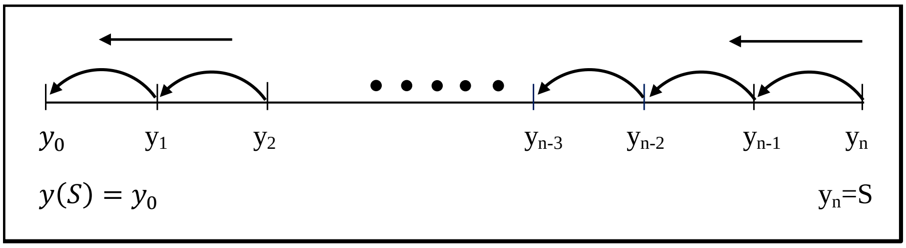
القيم	الحل العددي	الحل المضبوط	الخطأ
X	Y	T	E
0.01	1.010101	1.010050	5.1 E-6
0.1	1.105727	1.105170	5.5 E-5
0.2	1.222633	1.221402	1.23 E-4
0.3	1.351899	1.349858	2.04 E-4
0.4	1.494831	1.491824	3.00 E-4
0.5	1.652876	1.648721	4.15 E-4
0.6	1.827630	1.822118	5.51 E-4
0.7	2.020860	2.013752	7.10 E-4
0.8	2.234520	2.225540	8.98 E-4
0.9	2.470770	2.459603	1.11 E-3
1.0	2.731999	2.718281	1.37 E-3

4 . تطوير تقنية التكامل الرجعي(الخلفي) خطوة – خطوة لحل مسائل القيم الإبتدائية الصلبة

تم في هذا البند تطوير تقنية التكامل الرجعي(الخلفي) خطوة – خطوة، وذلك لغرض تسهيل استخدام هذه التقنية لحل المسائل الصلبة. إذ من خلال استخدام تقنية التكامل الخلفي خطوة – خطوة المطورة فإننا نقوم بحل معادلة جبرية واحدة فقط عند حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الأولى بمتغير واحد وحل معادلتين جبريتين بمتغيرين فقط عند حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية، بينما في تقنية التكامل الخلفي خطوة – خطوة الاعتيادية يتم حل (n) من المعادلات الجبرية في حالة حل معادلة تفاضلية واحدة من الرتبة الأولى وحل $(2n)$ من المعادلات الجبرية في حالة حل معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية وهكذا. و قد تم ايضاً تطبيق هذه التقنية على معادلات تفاضلية إعتيادية لملاحظة كفاءتها على هذه المعادلات.

4-1 التطوير الأول (1)

يتم في هذه التقنية البدء من القيمة (y_n) ثم بإجراء التكامل خطوة – خطوة حتى الوصول الى القيمة (y_0) والشكل التالي يوضح مبدأ هذه التقنية



4-1-1 تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على معادلة تفاضلية إعتيادية

مثال:

$$y' = y \quad , \quad y(0) = 1 \qquad x \in [0,1] \qquad (1)$$

الحل المضبوط للمسألة هو

$$y = e^x$$

الحل:

نقسم فترة التكامل الى (4) فترات جزئية إذ تكون $h = 0.25$

نفرض أن

$$y_n = y_4 = S$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_{n-1} = y_n - hf(x_n, y_n)$$
$$y_3 = y_4 - hy_4$$
$$y_3 = S - (0.25)S = 0.75S$$

وبنفس الطريقة

$$y_2 = y_3 - hy_3$$
$$y_2 = 0.75S - (0.25)(0.75)S = 0.5625S$$
$$y_1 = y_2 - hy_2$$
$$y_1 = 0.5625S - (0.25)0.5625S = 0.421875S$$
$$y_0 = y_1 - hy_1$$
$$y_0 = 0.421875S - (0.25)0.421875S = 0.31640625\text{S} \quad , \quad y_0 = 1$$
$$S = \frac{1}{0.31640625} = 3.160493827160494$$

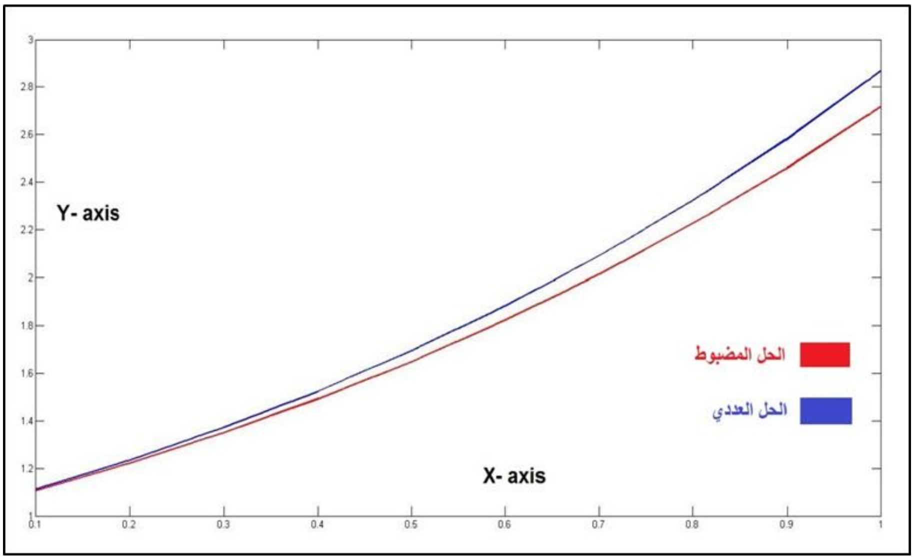
وبتعويض قيمة S في y_1, y_2, y_3, y_4 نحصل على القيم التالية

جدول (3) نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (1) بإستخدام طريقة اويلر الخلفية وبخطوة مقدارها $h = 0.25$

X	Y
0	1
0.25	1.33333333
0.5	1.77777777
0.75	2.37037037
1	3.16049382

جدول (4) مقارنة نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (1) بإستخدام طريقة اويلر الخلفية وبخطوة مقدارها $h = 0.1$ مع الحل المضبوط للمسألة

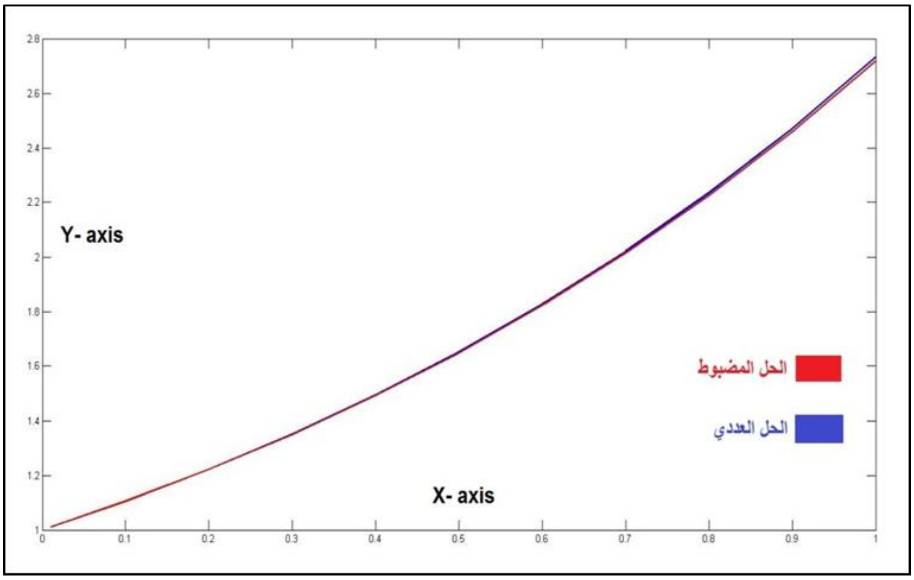
القيم	الحل العددي	الحل المضبوط	الخطأ
X	Y	T	E
0.1	1.111111	1.105170	E-3 5.94
0.2	1.234567	1.221402	E-31.31
0.3	1.371742	1.349858	E-32.18
0.4	1.524157	1.491824	E-33.23
0.5	1.693508	1.648721	E-3 4.47
0.6	1.881676	1.822118	E-35.95
0.7	2.090751	2.013752	E-37.69
0.8	2.323057	2.225540	E-39.75
0.9	2.581174	2.459603	E-21.21
1.0	2.867971	2.718281	E-21.49



شكل(1) مقارنة بين الحل بتقنية التكامل الرجعي المطورة (1) والحل المضبوط للمسألة (1) عندما قيمة $h = 0.1$

جدول (5) مقارنة نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (1) بإستخدام طريقة اويلر الخلفية وبخطوة مقدارها $h = 0.01$ مع الحل المضبوط للمسألة

القيم	الحل العددي	الحل المضبوط	الخطأ
X	**Y**	**T**	**E**
0.01	1.010101	1.010050	5.1 E-6
0.1	1.105727	1.105170	5.5 E-5
0.2	1.222633	1.221402	1.23 E-4
0.3	1.351899	1.349858	2.04 E-4
0.4	1.494831	1.491824	3.00 E-4
0.5	1.652876	1.648721	4.15 E-4
0.6	1.827630	1.822118	5.51 E-4
0.7	2.020860	2.013752	7.10 E-4
0.8	2.234520	2.225540	8.98 E-4
0.9	2.470770	2.459603	1.11 E-3
1.0	2.731999	2.718281	1.37 E-3



شكل(2) مقارنة بين الحل بتقنية التكامل الرجعي المطورة (1) والحل المضبوط للمسألة (1) عندما قيمة $h = 0.01$

2−1−4 تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على مسألة قيمة إبتدائية صلبة

مثال:

$$y'' + 1001y' + 1000y = 0 \quad ,, x \in [0,1] \qquad (2)$$

$$y(0) = 1 \quad , y'(0) = -1$$

الحل: نقسم فترة التكامل الى فترتين جزئيتين إذ تكون عندها قيمة $h = 0.5$

نحول المسالة الى نظام من معادلتين من الرتبة الأولى

$$y' = f(x, y, z) = z \quad , \quad y(0) = 1$$
$$z' = g(x, y, z) = -1001z - 1000y \quad , \quad z(0) = -1$$

نفرض

$$y_2 = S \quad , \quad z_2 = R$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_{n-1} = y_n - hf(x_n, y_n, z_n)$$
$$y_1 = y_2 - hf(x_2, y_2, z_2)$$
$$y_1 = y_2 - hz_2$$
$$y_1 = S - hR$$
$$z_{n-1} = z_n - hg(x_n, y_n, z_n)$$
$$z_1 = z_2 - hg(x_2, y_2, z_2)$$
$$z_1 = R + 1001hR + 1000hS$$
$$y_0 = y_1 - hz_1$$
$$y_0 = S - hR - h(R + 1001hR + 1000hS)$$
$$y_0 = S - 2hR - 1001h^2R - 1000h^2S \quad , y_0 = 1 \quad ..(1)$$
$$z_0 = z_1 - hg(x_1, y_1)$$
$$z_0 = z_1 - 1001hz_1 - 1000y_1$$
$$z_0 = R + 1001hR + 1000hS - h(-1001(R + 1001hR + 1000hS) - 1000(S - hR), z_0 = -1 \ldots \ldots(2)$$

وبتعويض قيم y_0 و z_0 وحل المعادلتين (1) و(2) بطريقة الحذف نحصل على

$$S = 0.4444 \quad , \quad R = -0.4444$$

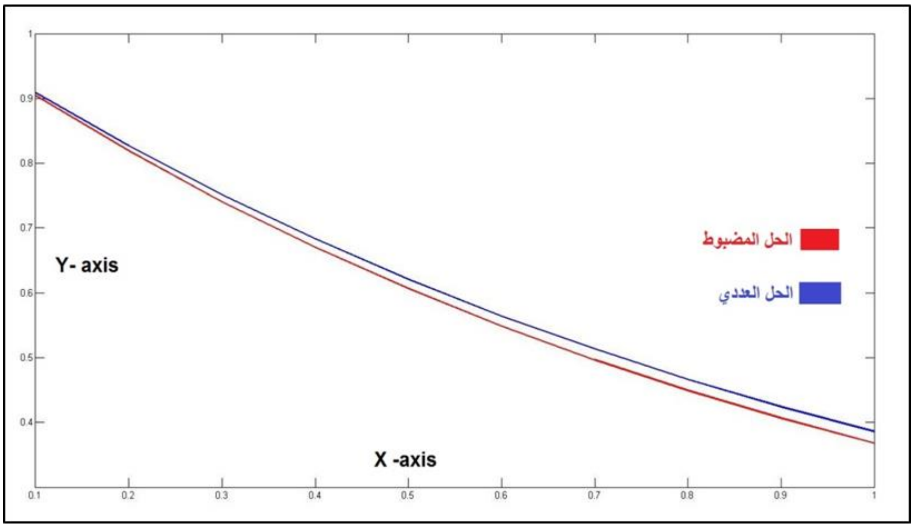
وبالتالي نحصل على قيم y_1, y_2, z_1, z_2

جدول (6) نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (2) بإستخدام طريقة اويلر الضمنية وبخطوة مقدارها $h = 0.5$

القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0	1	-1	1	-1	____	____
0.5	0.666	-0.666	0.6065	-0.6065	6.01 E-3	-6.01 E-3
1	0.4444	-0.4444	0.3678	-0.3678	1.62 E-2	-1.62 E-2

جدول (7) نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (2) بإستخدام طريقة اويلر الضمنية وبخطوة مقدارها $h = 0.1$ مع الحل المضبوط للمسألة

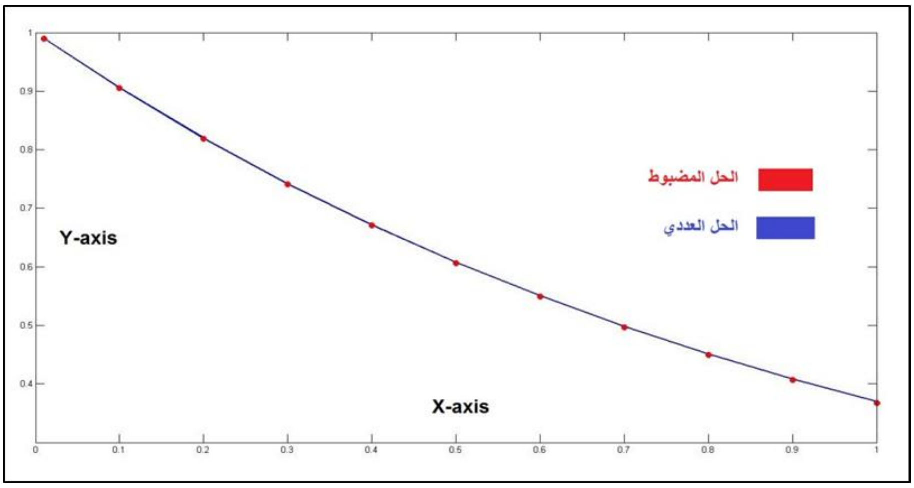
القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0.1	0.90909	-0.90909	0.90483	-0.90483	E-44.25	E-44.25-
0.2	0.82644	-0.82644	0.81873	-0.81873	E-47.71	E-47.71-
0.3	0.75131	-0.75131	0.74081	-0.74081	E-31.04	E-31.04-
0.4	0.68301	-0.68301	0.67032	-0.67032	E-31.26	E-31.26-
0.5	0.62092	-0.62092	0.60653	-0.60653	E-31.43	E-31.43-
0.6	0.56447	-0.56447	0.54881	-0.54881	3 E-1.56	3 E-1.56-
0.7	0.51315	-0.51315	0.49658	-0.49658	3 E-1.65	3 E-1.65-
0.8	0.46650	-0.46650	0.44932	-0.44932	3 E-1.71	3 E-1.71-
0.9	0.42409	-0.42409	0.40656	-0.40656	3 E-1.75	3 E-1.75-
1.0	0.38554	-0.38554	0.36787	-0.36787	3 E-1.76	3 E-1.76-



شكل(3) مقارنة بين الحل بتقنية التكامل الرجعي المطورة (1) والحل المضبوط للمسألة (2) عندما قيمة $h = 0.1$

جدول (8) نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (1) على المسألة (2) بإستخدام طريقة اويلر الضمنية وبخطوة مقدارها $h = 0.01$ مع الحل المضبوط للمسألة

القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0.01	0.99009	-0.99009	0.99004	-0.99004	4.91 E-6	-4.91 E-6
0.1	0.90528	-0.90528	0.90483	-0.90483	5 E-4.49	5 E-4.49-
0.2	0.81954	-0.81954	0.81873	-0.81873	5 E-8.14	5 E-8.14-
0.3	0.74192	-0.74192	0.74081	-0.74081	E-4 1.10	E-4 1.10-
0.4	0.67165	-0.67165	0.67032	-0.67032	E-41.33	E-41.33-
0.5	0.60803	-0.60803	0.60653	-0.60653	E-41.50	E-41.50-
0.6	0.55044	-0.55044	0.54881	-0.54881	E-41.63	E-41.63-
0.7	0.49831	-0.49831	0.49658	-0.49658	E-41.72	E-41.72-
0.8	0.45111	-0.45111	0.44932	-0.44932	E-41.79	E-41.79-
0.9	0.40839	-0.40839	0.40656	-0.40656	E-41.82	E-41.82-
1.0	0.36971	-0.36971	0.36787	-0.36787	E-41.83	E-41.83-

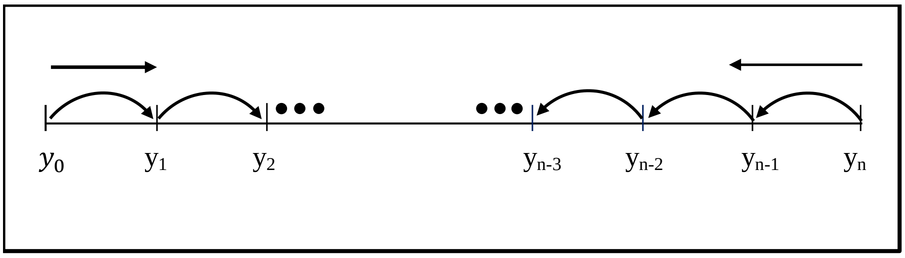


شكل(4) مقارنة بين الحل بتقنية التكامل الرجعي المطورة (1) والحل المضبوط للمسألة (2) عندما قيمة $h = 0.01$

4-2 التطوير الثاني (2)

عند استخدام طرائق حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية لحل المسائل الصلبة تظهر في كثير من الأحيان الكثير من الأخطاء. إذ يبدأ الحل العددي بصورة طبيعية وقريباً من الحل المضبوط للمسألة ولكن بعد عدد من الخطوات نلاحظ أن هذا الخطأ يزداد ويخرج عن السيطرة. لذلك يتوجب إيجاد تقنية تجعل من هذا الخطأ تحت السيطرة.

يمكن تطوير تقنية التكامل الخلفي خطوة – خطوة لحل مثل هذه المسائل وذلك بإستخدام الأسلوب الاتي:



1- تكامل امامي خطوة – خطوة حتى الوصول الى النقطة التي يبدأ عندها الخطأ يزداد(يخرج عن السيطرة) ثم التوقف.

2- تكامل خلفي خطوة – خطوة من القيمة y_n حتى الوصول الى النقطة التي توقفنا عندها.

3- مساواة التكامل الامامي بالتكامل الخلفي عند نقطة التوقف.

مثال على هذه التقنية إذا أردنا حل المسألة (1) بإستخدام طريقة اويلر الاعتيادية وبخطوة مقدارها $(h = 0.2)$ يكون

$$y_1 = y_0 + hy_0 = 1 + (0.2)(1) = 1.2$$
$$y_2 = y_1 + hy_1 = 1.2 + (0.2)(1,2) = 1.44$$
$$y_3 = y_2 + hy_2 = 1.44 + (0.2)(1.44) = 1.728$$
$$y_4 = y_3 + hy_3 = 1.728 + (0.2)(1.728) = 2.0736$$

عند (y_4) اصبح الحل العددي بعيداً عن الحل المضبوط إذ أن الحل العددي عند قيمة $(x = 0.8)$ هو $(y_4 = 2.0736)$ بينما الحل المضبوط عند نفس النقطة هو (2.2255409) لذلك نتوقف عند قيمة $(x = 0.6)$ والتي تقابل $(y_3 = 1.728)$ تم البدء من القيمة $(y_n = y_5)$ وبفرضها (S) ثم بإجراء التكامل الخلفي(الرجعي) خطوة – خطوة باستخدام طريقة اويلر الخلفية حتى الوصول الى نقطة التوقف $(y_3 = 1.728)$ ثم مساواة التكامل الامامي بالتكامل الخلفي وإيجاد قيمة (S). إذ

نفرض

$$y_n = y_5 = S$$

حسب طريقة اويلر الخلفية

$$y_{n-1} = y_n - hf(x_n, y_n)$$
$$y_4 = y_5 - hy_5$$
$$y_4 = S - (0.2)S = 0.8\,S$$

وبنفس الطريقة

$$y_3 = y_4 - hy_4$$
$$y_3 = 0.8\,S - (0.2)(0.8)\,S = 0.64\,S \quad , \quad y_3 = 1.728$$
$$S = \frac{1.728}{0.64} = 2.7$$

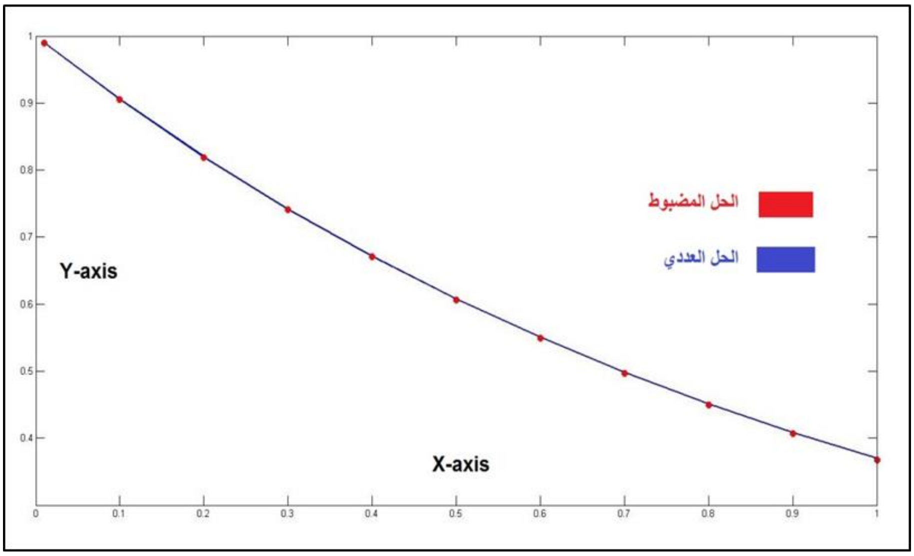
وبتعويض قيمة S في y_4, y_5 نحصل على القيم التالية

جدول (9) مقارنة نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (2) على المسألة (1) بإستخدام طريقة اويلر الخلفية وبخطوة مقدارها $h = 0.2$ مع الحل المضبوط للمسألة

القيم	الحل العددي	الحل المضبوط	الخطأ
X	Y	T	E
0.2	1.20000	1.22140	2.14 E-3
0.4	1.44000	1.49182	5.18 E-3
0.6	1.72800	1.82211	9.41 E-3
0.8	2.16000	2.22554	6.55 E-3
1.0	2.70000	2.71828	1.82 E-3

جدول (10) نتائج تطبيق تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) المطورة (2) على المسألة (2) بإستخدام طريقة اويلر الضمنية وبخطوة مقدارها $(h = 0.01)$ مع الحل المضبوط للمسألة

القيم	الحل العددي		الحل المضبوط		الخطأ	
X	Y	Z	T_1	T_2	E_1	E_2
0.01	0.99000	-0.99000	0.99004	-0.99004	E-69.4	E-69.4-
0.1	0.90438	-0.90438	0.90483	-0.90483	5 E-4.55	5 E-4.55-
0.2	0.81954	-0.81954	0.81873	-0.81873	5 E-8.14	5 E-8.14-
0.3	0.74192	-0.74192	0.74081	-0.74081	E-4 1.10	E-4 1.10-
0.4	0.67165	-0.67165	0.67032	-0.67032	E-41.33	E-41.33-
0.5	0.60803	-0.60803	0.60653	-0.60653	E-41.50	E-41.50-
0.6	0.55044	-0.55044	0.54881	-0.54881	E-41.63	E-41.63-
0.7	0.49831	-0.49831	0.49658	-0.49658	E-41.72	E-41.72-
0.8	0.45111	-0.45111	0.44932	-0.44932	E-41.79	E-41.79-
0.9	0.40839	-0.40839	0.40656	-0.40656	E-41.82	E-41.82-
1.0	0.36971	-0.36971	0.36787	-0.36787	E-41.83	E-41.83-



شكل(2−5) مقارنة بين الحل بتقنية التكامل الرجعي المطورة (2) والحل المضبوط للمسألة (2.6) عندما قيمة $h = 0.01$

5 الاستنتاجات

إن اهم ما تناوله البحث هو تطوير تقنية التكامل الرجعي (الخلفي) خطوة – خطوة لحل مسائل القيم الابتدائية الصلبة والغرض من هذا التطوير هو لتسهيل تطبيق هذه التقنية على المسائل الصلبة إذ من

المصادر

[1] إلياس، سهيل ياسين طه " التكامل الرجعي لتحسين الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية الصلبة"، رسالة ماجستير، جامعة الموصل، (2014).

[2] ساكا، فرج يعقوب إسحاق، " دراسة عدد من الطرائق العددية لبعض المعادلات التفاضلية الصلبة" رسالة ماجستير، جامعة الموصل، (2003).

[3] AL-Himmat, G. M. S. "Extentding the stability Region of some Numerical Methods for IVPs", M. Sc. Thesis, University of Mosul, (2000).

[4] Burden, R. L. and Faires, J. D. " Numerical Analysis ", 9th Ed. By Brooks/Cole, (2011).

[5] Cash, J. R. " Efficient numerical methods for the solution of stiff initial-value Problems and differential algebraic equations", (http://rspa.royalsocietypublishing.org), (2003).

خلال تطبيق التقنية المطورة يتم تقليل عدد المعادلات الجبرية اللازمة للحصول على الحل وتم تطبيق التقنية المطورة على المعادلات التفاضلية الاعتيادية وتم الحصول على نتائج دقيقة واخطاء قليلة.

[6] Chapra, Steven C. and Canale, Raymond P. " Numerical Methods for Engineers " 7th Ed. by McGraw-Hill, (2013).

[7] Lambert, J.D. "Computational methods in ordinary differential equations", John Wileey & sons inc, (1974).

[8] Murshed, A. A. A. "An investigation of Numerical Algorithms for solving stiff ODEs suitable for parallel computers", Ph. D. Thesis, University of Mosul, (2000).

[9] Omale, P. B. and Ojih, M. O. " Mathematical Analysis of Stiff and Non-Stiff initial Value Problems of Ordinary Differential Equation Using Matlab ",International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume (5), Issue (9), September (2014).

[10] Suli, Endre and Mayers, David F. "An introduction to numerical analysis", University of oxford, (2003).

Development of technique of Backward integration step-by-step for solve stiff initial value problems

Khalid A. M. Khalaf [1] , Bashir M. S. Khalaf [2]

[1] *Dept. of Mathematics , College of Edu. for pure Sciences , University of Mosul , Mosul , Iraq*

[2] *Dept. of Sciences of Computers , College of Edu. for pure Sciences , University of Mosul , Mosul , Iraq*

Abstract

Our purpose in this paper is the development of the technique of backward integration step-by-step, In order to facilitating the use of this technique for solving the Stiff Problems. When using backward integration step-by-step for solving one differential equation of first order we need to solve (n) algebraic equations while using the new developed technique we need solve one algebraic equation. In general if the order of the differential equation is (m), the solution needs solving $(mn)$of algebraic equation by using backward integration step-by-step. While the developed technique needs only solving (m) of algebraic equations.